课前预读：

《费曼物理学讲义》I ：Chpt.18、19

《新概念物理教程：力学》：第四章第 1、3、4 节

Lecture 17 、18 Many particles, rotational motion in 2D

多数物理体系并不是由一个质点组成的，而是由非常多的质点组成的。质点这个概念本身就是一个理论模型。当我们讨论一个球的运动时，如果球不转动，那么球上的任何一点的运动都可以代表其他点的运动，那时候我们就可以把一个球抽象成一个质点。但当这个球在转动时，这样的抽象就不行了。因为球上不同点的运动方式是不同的。这时候就必须把球作为一个多质点体系来研究。

如果像是空气这样的多质点体系，用力学来讨论是非常困难的，因为不同的空气分子之间既有相互作用，同时它们的运行形式之间的联系又非常弱。因此从力学的角度就需要列出大量联立微分方程组来进行处理。而对于像球这样的物体，由于它们的形变是可以忽略的，因此会发现球上不同点运动的方式虽然不同，但它们的关联性非常强，也就是说有可能通过确定球上少数几个点的运动来确定整个球的运动。简单地看，球的运动就是整体的运动和转动组成的，可能了解了这两个运动就可以把整个球的运动确定下来。

质心

对于一个多质点体系，如果每个质点的质量为m_i，位置为$\vec{r}_i$，受到的力为$\vec{F}_i$。则它们满足方程

$$\vec{F}_i = \frac{m_i d^2 \vec{r}_i}{dt^2}$$

将这些方程加到一起

$$\sum_i \frac{m_i d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i$$

考虑到体系中不同质点间的作用力与反作用力大小相同，方向相反，而且在上式的求和中会成对出现，因此会全部相互抵消。求和的结果是体系外对体系内质点的作用力之和，我们称之为外力

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{ext}$$

并考虑质点的质量是不变的，因此前式变为

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i\vec{r}_i = \vec{F}_{ext}$$

定义质心坐标为

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

体系总质量为

$$M = \sum_i m_i$$

最终得到方程

$$M\frac{d^2\vec{r}_c}{dt^2} = \vec{F}_{ext}$$

这个方程等价于认为存在一个质点，其质量等于总质量M，其坐标为质心坐标$\vec{r}_c$，受到的力为$\vec{F}_{ext}$。因此用质心来描述多质点体系的整体运动是比较方便的。对于连续系统，质心坐标变成积分

$$\vec{r}_c = \frac{\int \rho\vec{r}dV}{\int \rho dV}$$

其中ρ为物体的密度。随质心运动的参照系就是**质心系**。

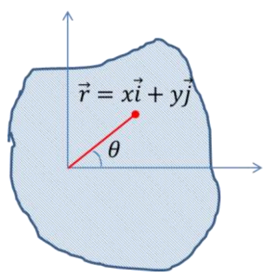
多质点体系的运动可以分解为体系质心的运动，和各质点相对于质心的运动两类运动。质心的运动只与体系受到的合外力有关。相对于质心的运动可以在质心系里处理。对于刚体而言，各质点相对于质心的距离是不变的，因此相对于质心的运动就是转动。

力矩和角动量

考虑一个刚体绕某个固定的轴在做转动，如一扇门绕着门轴转动。（刚体可简单认为是不可形变的物体）这样的运动可以用刚体上任意一点绕轴转过的角度来描述。由此可以定义角速度和角加速度

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$\alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$



对于定轴转动，只需要考虑在垂直于转轴的平面内的运动就足够了，因此可以在垂直于转轴的二维平面中进行处理

当将转轴所在的位置取为坐标原点时，如图所示，刚体上任意一点$\vec{r}$

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

的速度

$$\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$$

可以和角速度联系起来

$$v_x = -\omega y,\quad v_y = \omega x$$

如果定义角速度为矢量，对于定轴转动，其方向按右手法则定义为转轴方向的话

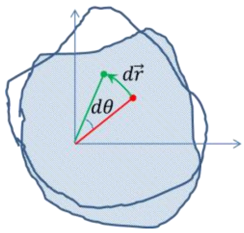
$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$$

容易发现关系

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

可以证明，这个式子不仅对定轴转动正确，而且对于任意转动也是对的。

考虑一个跷跷板，在一边往下压，另一边往上抬的时候，如果两边用力大小相同，那么这个跷跷板受到的合外力为零，因此质心没有加速度。但是我们会看到虽然整体不运动，但是它会转动。那么计算一下此时力所做的功，注意到在受力点$\vec{r}$，其在dt时间内的位移为



$$d\vec{r} = d\vec{\theta} \times \vec{r}$$

因此力做功为

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\left(d\vec{\theta}\times\vec{r}\right)$$

利用公式

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right) = \vec{C}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$$

可以得到

$$dW = \left(\vec{r}\times\vec{F}\right)\cdot d\vec{\theta}$$

定义力$\vec{F}$的力矩为

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}$$

则微功dW可以写作

$$dW = \vec{\tau}\cdot d\vec{\theta}$$

由此可见正是力矩使物体转动起来并产生转动动能。

如果这个体系就只有一个质点，其质量为m，其坐标为$\vec{r}$，当它绕z轴转动时，

力矩为

$$\tau = xF_y - yF_x$$

利用牛顿方程上式可变为

$$\tau = xm\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right) - ym\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \frac{d}{dt}\left[xm\frac{dy}{dt} - ym\frac{dx}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left(xp_y - yp_x\right)$$

定义定轴转动的角动量为

$$L_z = xp_y - yp_x$$

则前式变为

$$\tau = \frac{dL_z}{dt}$$

也就是说角动量的变化率就等于力矩，这被称为角动量定理。这个定理和动量定理（动量的变化率等于力）很像。对于一个质点，其的角动量定义为

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

角动量定理表示为

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

需要注意的是力矩和角动量是和参照点有关的，对于不同的参照系，$\vec{r}$不一样，从而力矩和角动量也会发生改变，因此说力和力矩时必须说清楚是相对哪个点而言的。如果参照点有速度，角动量定理很可能是不正确的。幸运的是，可以证明相对于多质点体系的质心而言，角动量定理是正确的。

角动量守恒和开普勒第二定律

当体系的力矩为零时，则

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

因此此时角动量是守恒的。对于有心力而言，由于质点受力方向是平行与$\vec{r}$的，因此其力矩为零。因此对于有心力作用下的体系，其角动量是守恒的。对于角动量守恒的质点，在时间间隔dt内，由于

$$\vec{L}dt = \vec{r} \times m\frac{d\vec{r}}{dt}dt = m(\vec{r} \times d\vec{r})$$

而$\frac{1}{2}(\vec{r} \times d\vec{r})$就是其与坐标原点的连线扫过相同面积的面积分元，由于角动量L是常数，因此该质点在相同的dt内其与坐标原点的连线扫过相同的面积。这正是开

普勒第二定律。

星系构造

考虑大量的粒子运动，假设它们不受到外力作用，只有相互间的万有引力。因为体系无外力，因此在质心系中看，体系总动量为零，角动量守恒。假设角动量处于 z 方向。对于 z 方向的运动，由于粒子间的相互摩擦，其速度会慢慢消失，相应的能量转换成其他方向的热运动。而在 xy 平面内，由于绕 z 轴的总角动量守恒，因此无论速度大小怎么变化，这样的绕轴整体运动总是存在的。因此最后体系会演化为一个接近盘子的形状。这也是为什么我们观测到的星系都是扁平的。

刚体定轴转动

对于一个刚体，它在做定轴转动。为简化处理，把这个刚体看成一个在 xy 平面内的二维刚体，转轴为 z 轴。则其上任意一点$\vec{r}_i$的速度$\vec{v}_i$为

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$为刚体转动的角速度，方向为 z 方向。其总角动量为所有质点角动量的叠加

$$\vec{L}_{tot} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \sum_i [\vec{r}_i \times m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)]$$

注意到$\vec{r}_i$是在 xy 平面内，与角速度相互垂直，因此上式变为

$$\vec{L}_{tot} = \vec{\omega} \sum_i (m_i r_i^2)$$

定义刚体的转动惯量为

$$I = \sum_i (m_i r_i^2)$$

则刚体的总角动量为

$$\vec{L}_{tot} = I\vec{\omega}$$

转动惯量是刚体所固有的特性，确定了参照轴的位置，其大小就确定了，和刚体的角速度大小无关。对于连续分布的体系而言，计算转动惯量时求和就变为了积分。

$$I = \int \rho r^2 dV$$

对于刚体上的每一个质点，都满足角动量定理

$$\vec{\tau}_i = \frac{d\vec{L}_i}{dt}$$

将它们都加起来得到

$$\sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt}$$

刚体上每一点会受到来自刚体外的力，也会受到刚体内其他点的力。这些力都成对，且由牛顿第三定律知它们大小相同，方向相反。在计算力矩的时候也是成对出现的。如对刚体内的两点 i、j，i 点坐标为$\vec{r}_i$，受到 j 对它的力$\vec{F}_{ij}$，j 点坐标为$\vec{r}_j$，受到 i 对它的力$\vec{F}_{ji}$，且$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$。这两个力产生的力矩和为

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} - \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}$$

$\vec{r}_i - \vec{r}_j$为两点的相对坐标，而$\vec{F}_{ij}$是两点间的相互作用，它是与两点间的相对坐标平行的，因此上式为零。因此体系的总力矩就是它受到的总外力矩。内力的力矩都两两抵消了。

$$\sum_i \vec{\tau}_i = \vec{\tau}_{ext}$$

另外

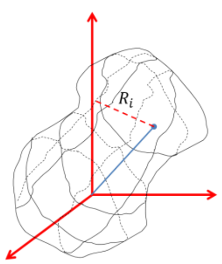
$$\sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{L}_i = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = I\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

最后就得到了刚体做定轴转动的动力学方程

$$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\tau}_{ext}$$

这个方程的形式和牛顿方程一样，物理量之间有对应关系。如转动惯量对应于质量，角速度对应于速度，角加速度对应于加速度，力矩对应于力。质量表征了一个物体的惯性，也就是它受力后运动状态的改变情况。当受力相同的时候质量越大，惯性越大，改变运动越困难，产生的加速度小。而转动惯量表征了一个物体在转动方面的惯性。在相同的力矩作用下，转动惯量越大的物体越难改变转动状态，产生的角加速度越小。

之前计算时将刚体简化为一个 xy 平面内的二维刚体，



而一般刚体并不是二维的。遵循前面的讨论方式，利用矢量的特性，不难得到，对于一个三维刚体，当它做定轴转动的时候定义其转动惯量为

$$I = \sum_i m_i R_i^2$$

或用积分形式

$$I = \int \rho R dV$$

其中R_i是刚体上每一点距离转轴的距离（如图所示）。其转动满足的方程依然为

$$\vec{\tau} = I \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt}$$

平行轴定理

转动惯量 I 与力矩和角动量一样是与参照点或者说参照轴的位置有关的。若刚体质心的坐标为$\vec{r}_c$，参照轴过质心时刚体的转动惯量为

$$I = \sum_i m_i R_{ic}^2$$

其中R_{ic}是刚体上每一点距离过质心的那个转轴的距离。

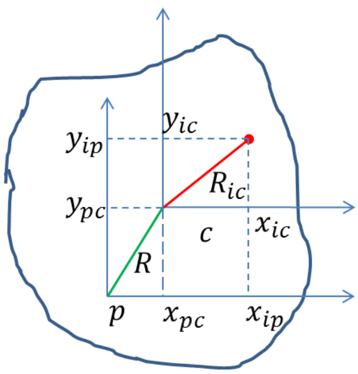
$$R_{ic}^2 = x_{ic}^2 + y_{ic}^2$$

现在将转轴换成距离前转轴距离为 R 的另外一个转轴，如图（xy平面投影图）所示。则相对这个转轴的转动惯量为

$$I_p = \sum_i m_i R_{ip}^2$$

其中

$$R_{ip}^2 = x_{ip}^2 + y_{ip}^2$$



利用关系

$$x_{ip} = x_{pc} + x_{ic}, \quad y_{ip} = y_{pc} + y_{ic}, \quad x_{pc}^2 + y_{pc}^2 = R^2$$

可得

$$I_p = \sum_i m_i \left(x_{ic}^2 + x_{pc}^2 + 2x_{ic}x_{pc} + y_{ic}^2 + y_{pc}^2 + 2y_{ic}y_{pc}\right)$$

$$= \sum_i m_i R_{ic}^2 + MR^2 + 2x_{pc}\sum_i m_i x_{ic} + 2y_{pc}\sum_i m_i y_{ic}$$

注意到$\sum_i m_i x_{ic}$和$\sum_i m_i y_{ic}$就是计算体系相对于质心的质心坐标，都为零。因此得到

$$I_p = I_c + MR^2$$

这被称为平行轴定理。

另外**在计算转动惯量时应该注意当转轴方向不同时，转动惯量也不相同**。

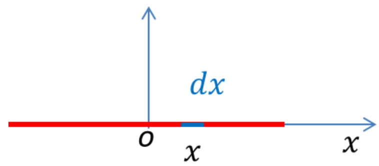
【例】计算长度为l的均匀细棒的转动惯量，转轴垂直于细棒

当转轴过细棒的一端时

$I = \int_0^{\mathrm{l}} \rho x^2 dx = \frac{1}{3}\rho l^3 = \frac{1}{3} m l^2$

当转轴过细棒中点时

$$I_c = \int_{-l/2}^{l/2} \rho x^2 dx = \frac{1}{12}\rho l^3 = \frac{1}{12} m l^2$$



可以看到

$$I = I_c + m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$